

La gestion actif-passif selon un gestionnaire d'une dette publique, la CADES

Éric Ralaimiadana*
Gestion Actif-Passif
C.A.D.E.S.
eric.ralaimiadana@cades.fr

I Introduction

La mission de la CADES (caisse d'amortissement de la dette Sociale) est de rembourser les déficits cumulés du régime d'assurance-maladie. Nous disposons pour cela d'une ressource unique et exclusive affectée par la loi, la contribution au remboursement de la dette Sociale (CRDS). Pour répondre à la question « comment rembourser de manière optimale », nous nous aidons de notre modèle de gestion actif-passif¹.

La gestion d'une dette présente des analogies remarquables avec la gestion d'actifs. Par exemple, une compagnie assurant une flotte de risques donnée, reçoit des primes et constitue un portefeuille d'actifs. Elle le compose de manière à optimiser son rendement, afin de couvrir ses engagements envers les assurés, ses propres coûts, et de dégager une marge bénéficiaire. Pour sa part, la CADES reçoit une taxe dont l'assiette ainsi que le taux sont définis par la loi ; si l'assiette fluctue de par la nature de ses composantes, le taux de prélèvement est inchangé depuis l'origine. On peut considérer que nous gérons un régime à cotisations définies, celles-ci étant les flux de CRDS, avec pour engagements les flux d'amortissement de la dette.

Si la modélisation de notre gestion actif-passif emprunte largement aux outils théoriques de la gestion d'actifs, les articles sur la gestion d'une dette *stricto sensu* sont rares, ces analyses étant essentiellement conduites par des entités en charge de dettes « sensibles », soit au sein de l'administration des finances publiques d'un État, d'un établissement de service public, ou d'une grande entreprise.

1. Nous remercions Jean-François Boulier pour nous avoir aimablement incité à publier cet article. Nos remerciements s'adressent également à l'(aux)arbitre(s) anonyme(s) de « Banque et Marchés » pour son (leur) travail et ses (leurs) commentaires fort profitables, ainsi qu'à MM. Patrice Ract Madoux et Christophe Frankel pour leurs remarques.

Les travaux de recherche dont notre modélisation se rapproche sensiblement sont ceux de Brennan et Xia (2002) [1]. Les auteurs ont déterminé la stratégie optimale d'investissement dans un univers dépourvu d'instrument procurant un rendement indexé sur l'inflation, constitué d'un actif monétaire, d'un actif risqué, et d'obligations à taux fixe nominales. Ils ont montré que pour un agent d'horizon d'investissement T fini, en présence d'une composante non anticipée de l'inflation non couverte par un instrument de marché, le portefeuille optimal est la somme de deux portefeuilles : l'un procurant le rendement le plus fortement corrélé à celui d'une obligation indexée de maturité T , et l'autre étant le portefeuille de variance minimale au sens de Markowitz (1959) [2], combinant l'actif risqué et le monétaire.

Leurs résultats ont révélé une forte sensibilité à l'aversion au risque de l'agent : plus elle s'élève, d'une part, plus l'allocation en un portefeuille répliquant le titre indexé s'accroît, et plus la maturité de l'obligation nominale diminue, d'autre part.

Ils citent dans leur étude les travaux de Campbell et Viceira (1999) [3], dont notre réflexion est également fort proche. Ces derniers ont résolu par méthode numérique l'optimisation de la stratégie d'un investisseur sans limitation d'horizon, dans le même univers d'investissement que Brennan et Xia, avec une stratégie dite « myope », *i.e.* à proportions constantes. En exhibant une solution optimale sous une forme analytique, Brennan et Xia mettent en exergue la perte de valeur engendrée par la solution de la stratégie « myope », ainsi que la sensibilité des résultats à deux caractéristiques du modèle : l'horizon, et les paramètres de retour à la moyenne des processus de diffusion des variables.

Un récent article de la revue *Banque & Marchés* (2004) [4] dresse un état des lieux des méthodes de gestion des fonds de retraite. Nous relevons plusieurs similitudes au niveau de la modélisation des processus des variables d'intérêt, avec





notre approche. Notamment, celle de Cairns (1998) [5] introduit un flux de retraite stochastique dans la modélisation d'un fonds à prestations définies. La retraite est un pourcentage fixe du salaire, que l'auteur modélise par un processus de diffusion non corrélé aux bruits du marché. Par ailleurs, les analyses développées dans les articles de Svensson et Werner (1993) [6], ainsi que Koo (1998) [7], ont une résonance directe avec notre réflexion. Leurs auteurs examinent l'optimalité du portefeuille et de la consommation, dans le cas d'un agent doté d'un salaire stochastique. Ils introduisent une source de risque non duplicable par un instrument négociable, et placent ainsi le problème dans un cadre d'incomplétude du marché.

La suite de l'article s'articule de la manière suivante. Nous rappelons brièvement le cadre réglementaire qui définit le fonctionnement de la CADES. Ensuite, nous décrivons notre représentation du bilan en éléments simples, qui aboutit à une économie régulée par trois variables, le taux court nominal, le taux d'inflation, et le taux de croissance en volume de la CRDS. Ayant décrit les équations de diffusion suivies par leurs processus, nous exposons notre problème d'optimisation et sa résolution. Nous décrivons ensuite les outils d'aide à la décision mis en place à partir des résultats de la modélisation. Nous consacrons une dernière partie à la revue critique du modèle et aux évolutions envisagées, et offrons quelques conclusions sur la gestion de la dette sous l'éclairage de la gestion actif-passif.

II Rappel

Trois textes marquent l'histoire de la CADES :

- Le texte fondateur, l'ordonnance du 24-janv.-1996, définit sa mission, l'apurement la dette de la Sécurité Sociale, et fixe sa durée d'existence, jusqu'au 31-janv.-2009. L'encours de dette s'élève à 21 milliards d'euros, auxquels s'ajoutent des versements annuels de 1.9 milliards d'euros à l'État pendant douze ans.

- La loi du 19-déc.-1997 de financement de la Sécurité Sociale pour 1998 prolonge de cinq ans le mandat de la CADES, en lui transférant 13.3 milliards d'euros de dettes.

- Enfin, la loi du 13-août.-2004 relative à l'assurance-maladie lui transfère 35 milliards d'euros au titre des déficits cumulés de ce régime à fin 2004, auxquels s'ajoute une dette prévisionnelle limitée à 15 milliards d'euros. Elle supprime la référence à une date fixe de fin, et dispose que tout nouveau déficit du régime devra être financé par une ressource nouvelle.

Nous illustrerons par la suite la manière dont la problématique de gestion actif-passif de l'établissement s'est transformée avec les modifications de la réglementation.

III Méthodologie

1. Modélisation du bilan

Le bilan de la CADES peut être décomposé en quelques grands postes. Le patrimoine immobilier hérité lors de sa constitution ayant été vendu, l'actif consiste aujourd'hui uniquement en une créance sur la contribution prélevée sur l'ensemble des revenus nationaux, la CRDS, qui lui est affectée exclusivement. Le passif est composé d'une dette financière, il n'y a pas de capital social.

tée exclusivement. Le passif est composé d'une dette financière, il n'y a pas de capital social.

A. L'actif

L'assiette de la CRDS est composée des revenus d'activité (67 %), de remplacement (21 %), de patrimoine et de placement (10 %), des jeux et ventes de métaux précieux (2 %).

Dans la mesure où cette contribution est prélevée globalement sur tous les revenus, une manière simple de modéliser notre recette est de retenir comme « proxy » de son assiette le revenu disponible brut, agrégat de la comptabilité nationale. Une autre manière consisterait à modéliser séparément les revenus d'activité et de transfert, ceux de placement et de patrimoine, et assimiler la croissance du reliquat à une marche aléatoire. Notre choix a été d'aller au plus simple, constatant que l'assiette a connu de nombreux changements ainsi que diverses mesures d'exonération ciblées, qui n'ont pas de raison de cesser : tout gain attendu d'une modélisation plus fine par catégorie de revenus est à relativiser étant données les fluctuations dues aux changements de périmètre.

La question est ensuite, à taux de prélèvement constant (0.5 %), de modéliser le rythme de croissance de ces flux de revenus. Si on s'intéresse aux trois premiers postes par ordre d'importance dans l'assiette, les salaires et les revenus vieillesse ont connu une croissance en volume quasi-constante sur la période 1979-2001. Le poste des revenus de placements a quant à lui connu sur la période une croissance en volume pouvant s'assimiler à une tendance à laquelle s'ajoute un bruit blanc.

Une modélisation assez simple de notre actif repose sur les équations de diffusion de deux processus, le taux de croissance réelle de notre recette, et le taux d'inflation. Ils suivent des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. La croissance en valeur de l'actif est obtenue par composition de ces derniers.

Nous notons à l'instant t , A_t la valeur de l'actif, k_t son taux de croissance en valeur, g_t son taux de croissance réelle, et i_t le taux d'inflation.

La dynamique de A_t est décrite par l'équation de diffusion suivante

$$dA_t = A_t k_t dt$$

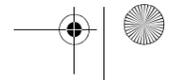
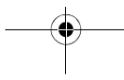
et son taux de croissance en valeur est modélisé par

$$e^{k_t dt} = e^{(g_t + i_t) dt}$$

Les équations de diffusion suivies par ces processus de taux seront développées dans la suite.

B. Dynamique de l'endettement net

L'endettement net varie de la manière suivante : à chaque fin d'année, nous constatons le solde entre la CRDS reçue et les flux à décaisser, au titre des emprunts en vie, ou d'une reprise éventuelle de dette. S'il est positif, nous réduisons la dette par des rachats, s'il est négatif, nous devons réemprunter. Nous appelons **solde de financement** la variation de dette nette consécutive à l'emploi de ce solde, et la notons S_t . Dans la suite, elle sera indifféremment appelée capacité d'amortissement.



Pour expliciter la dynamique de l'endettement net, nous adoptons les notations suivantes :

- \hat{L}_t la valeur de la dette échue l'année t
- L_{t-1}^t la valeur en euros courants en t, de la dette héritée de l'année t – 1 avant les arrivées à échéance,
- L_t^* la dette en fin d'année t avant ré-allocation,
- L_t la valeur en euros courants en t, de la dette nette encore en vie,

La dynamique de l'endettement net s'écrit de manière simple

$$L_t = L_{t-1} - S_t$$

La dette nette constatée l'année t, avant arrivées à échéance, est la somme de la dette échue en t et de la dette en fin d'année t avant ré-allocation, ce qui s'écrit

$$L_{t-1}^t = \hat{L}_t + L_t^*$$

Nous pouvons montrer que la dette nette en fin d'année t après ré-allocation s'écrit

$$L_t = L_t^* + S_t^{net} \quad (1)$$

où S_t^{net} désigne le **solde net de financement**, *i.e.* le solde S_t qu'on impacte des effets du temps et des variations de marché sur la dette héritée de l'année t – 1, ainsi que des arrivées à échéance.

Démonstration

En effet, le solde net s'écrit

$$S_t^{net} = S_t - \hat{L}_t - (L_{t-1} - L_{t-1}^t) \quad (2)$$

Le solde de financement s'obtient en calculant D_t , le disponible à la date t, expression dans laquelle V_t désigne un nouveau flux de dette éventuel, et c_t les coûts de fonctionnement

$$D_t = A_{t-4} \exp^{\int_{t-4}^t k_u du} - V_t + c_t$$

Si la variation de valeur de la dette a réduit celle-ci, ceci accroît le solde de financement, et inversement. On ajoute donc à D_t l'opposé de cette variation de valeur, soit $L_{t-1} - L_{t-1}^t$, pour obtenir S_t

$$S_t = D_t + (L_{t-1} - L_{t-1}^t) \quad (3)$$

Le solde net s'écrit alors

$$S_t^{net} = D_t - \hat{L}_t \quad (4)$$

La dynamique de l'endettement net peut alors s'écrire

$$L_t = L_{t-1} - (D_t + L_{t-1} - L_{t-1}^t)$$

$$L_t = \hat{L}_t + L_t^* - D_t$$

ce qui d'après (4), redonne l'équation (1)

Le solde net S_t^{net} est donné par (4). Selon son signe, il représente une capacité ou un besoin de financement. Il constitue le total des rachats ou abondements, effectués à hauteur des proportions initiales, de lignes d'obligations existantes à leurs prix, mesurés en t.

C. Le passif

Notre passif est constitué quasi-exclusivement par notre portefeuille d'endettement, la CADES n'ayant pas de fonds propres.

La dette est répartie en trois classes, les instruments à taux fixe, indexés sur l'inflation – inflation hors tabac en France, et à taux variable. Les variables qui gouvernent les éléments du passif sont les ainsi les taux d'intérêt nominaux, et le taux d'inflation.

Nous spécifions un modèle de Vasicek [8] pour la courbe des taux. Celui-ci présente le double avantage, d'intégrer un mécanisme de retour des taux vers la moyenne, et de permettre de recréer la courbe entière à partir du seul taux court. Il reflète une caractéristique que montrent les études économétriques, à savoir que les seules variations du taux court expliquent à environ 80 % les mouvements de la courbe.

Les variables qui gouvernent les éléments du passif sont finalement les taux d'intérêt à court terme et le taux d'inflation.

2. Processus suivis par les variables d'intérêt

Le processus du taux d'intérêt court nominal suit l'EDS suivante

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_r W_r(t)$$

La formulation du taux zéro-coupon sur la période [t, T] est

$$R(T-t, r) = R_\infty - \frac{1}{a(T-t)} \left\{ (R_\infty - r)(1 - e^{-a(T-t)}) - \frac{\sigma_r^2}{4a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right\}$$

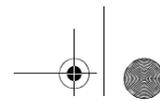
Le processus du taux d'inflation est assujéti à une EDS identique à celle du taux court

$$di(t) = c(d - i(t))dt + \sigma_i W_i(t)$$

Tandis que le taux de croissance de la CRDS en volume a pour équation de diffusion

$$dg(t) = (m - g(t))dt + \sigma_g W_g(t)$$

Les trois sources de risque, les mouvements browniens W_r, W_i, W_g , sont reliées par leurs corrélations instantanées croisées, $\rho_{r,i}, \rho_{g,i}, \rho_{g,r}$, respectivement.



IV Problème d'optimisation

1. Formalisation

Les soldes de financement cumulés année après année vont déterminer notre capacité à amortir la dette. En itérant l'équation dynamique de l'endettement net, on voit que la variation de ce dernier entre les années 0 et t équivaut au cumul des soldes de financement de chaque période. Optimiser l'amortissement de la dette peut s'écrire, en première approche, comme la maximisation de l'espérance du cumul des soldes de financement annuels.

Le programme d'optimisation s'écrit ainsi

$$\max E \left[\sum_{l=0}^t S_l \right]$$

La(les) solution(s) du programme d'optimisation consiste(nt) en des pondérations de portefeuille. Le résultat dépend notamment de la règle de re-balancement adoptée. Nous avons choisi pour règle de réallouer chaque portefeuille en maintenant ses allocations initiales, ce qui revient à rechercher des structures-cible de portefeuilles maintenues constantes pendant la durée du mandat. Nous noterons $(\varpi_{k,m})$ le vecteur des pondérations de la dette en chaque classe, repérée par l'indice k, et en chaque maturité, repérée par l'indice m.

Nous cherchons en effet à déterminer une (ou plusieurs) structure(s) qui, sur le long terme, nous permette(nt) d'atteindre notre objectif, celui de rembourser la dette au moindre coût pour le contribuable. Dans le cadre d'une gestion sur longue période que l'on souhaite lisible, le choix de la règle des proportions constantes permet de présenter, par exemple à nos autorités de tutelle, des structures optimales d'endettement par essence non fluctuantes au gré des événements futurs.

La dette étant transcrite en un portefeuille d'obligations zéro-coupon, toute opération de refinancement ou de rachat s'effectue aux prix de marché, lesquels tout comme S_t et S_t^{net} , sont mesurables en t.

Nous noterons $E_{k,m}(t)$ la valeur finale d'un flux payé sur la dette de classe k et de maturité m, $B_{t,m}$ le prix en t d'un zéro-coupon de maturité m.

Lorsque le **solde net** de financement est alloué, la valeur courante de la dette devient

$$L_t = L_t^* - S_t^{net}$$

$$L_t = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{M-t} [B_{t,m} E_{k,m} - \varpi_{k,m} S_t^{net}]$$

où pour un terme X quelconque, X^+ désigne la partie positive de X.

En effet, si la portion du solde allouée à l'amortissement de l'encours $E_{k,m}(t)$ excède la valeur de marché de ce dernier calculée l'année t, cet encours sera racheté en totalité, et le reliquat viendra s'ajouter au solde disponible restant.

Le mécanisme d'amortissement de la dette entraîne que, l'année au cours de laquelle l'endettement net franchit la valeur nulle, le solde de financement est positif et excède la valeur courante de la dette constatée en fin d'année précédente. Ceci nous permet de représenter notre programme d'optimisation sous une forme duale.

2. Forme duale du programme d'optimisation

Nous quittons momentanément le cas particulier de la CADES, pour nous intéresser au cas « stylisé » d'une entreprise endettée, sommée par son actionnaire de rembourser ses emprunts en y affectant l'intégralité de ses recettes d'exploitation. Celle-ci a l'État comme dernier garant.

Supposons qu'elle se soit engagée auprès de la communauté financière sur une date probable d'achèvement du remboursement H, et que son dernier emprunt arrive à échéance en cette date. Deux cas de figure se présentent en date H :

– soit l'entreprise a bien estimé sa date d'achèvement du remboursement, voire est en avance, ce qui se traduit par

$$E(S_H) \geq E(L_{H-1})$$

– soit l'entreprise a sous-estimé cette date, auquel cas

$$E(S_H) < E(L_{H-1})$$

Elle encourt en ce cas le risque d'une dégradation de son crédit, et d'achever le remboursement à une date effective supérieure à la date estimée.

Développons le dernier cas de figure : la sous-estimation de la durée d'amortissement signifie pour l'entreprise un besoin de financement de $(L_{H-1} - S_H)$, qui nécessite soit de réemprunter dans des conditions de crédit et de liquidité dégradées, soit le recours au dernier garant pour « éponger » le besoin de financement.

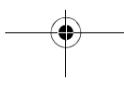
Les conséquences envisagées dans ce cas de figure n'existent pas pour la CADES. Notre établissement bénéficie en effet de la garantie implicite de l'État, et ses recettes sont un prélèvement sur le revenu national. Néanmoins, l'analyse du risque par l'horizon de remboursement est valide, et nous permet d'exprimer la probabilité α de non atteinte du remboursement en fonction du quantile de risque $H(\alpha)$, de la manière suivante

$$\alpha = P(S_{H(\alpha)} - L_{H(\alpha)-1} < 0)$$

Nous pouvons ainsi écrire notre problème d'optimisation comme la minimisation d'un risque, sous la forme

$$\min P(L_{H(\alpha)-1} - S_{H(\alpha)} > 0)$$

Nous ne connaissons pas la forme analytique de la densité de probabilité de la variable $X_t = S_t - L_{t-1}^+$, conditionnellement à la filtration (\mathcal{F}_t) – filtration engendrée par les mouvements browniens $W_r(t)$, $W_f(t)$, $W_g(t)$. La présence de l'indice temporel t – 1 dans l'expression de X_t montre le caractère « path-dependent » de X_t , et de sa densité de probabilité conditionnelle. Son expression ne devrait pas être triviale.



En revanche, nous savons simuler des tirages dans la loi conditionnelle de $S_t | \mathcal{F}_t$. C'est ce que nous réalisons au cours de notre processus de résolution.

3. Estimateur capacité d'amortissement espérée

La densité de probabilité conditionnelle de X_t dépend ainsi du niveau atteint en date t par cette variable. Partant d'un niveau initial de dette L_0 en début d'année 0, X_t dépend du niveau atteint par le cumul des soldes entre les années 0 et t , noté $S^c(0,t)$, càd de l'événement

$$\left\{ S^c(0, t) = \sum_{l=0}^t S_l = x \right\}$$

Notre risque d'échec, défini au paragraphe précédent comme le risque α de non atteinte du remboursement à l'horizon $H(\alpha)$, s'accroît avec la baisse de x . Plus faible est le cumul des soldes, plus il sera difficile de rembourser tôt.

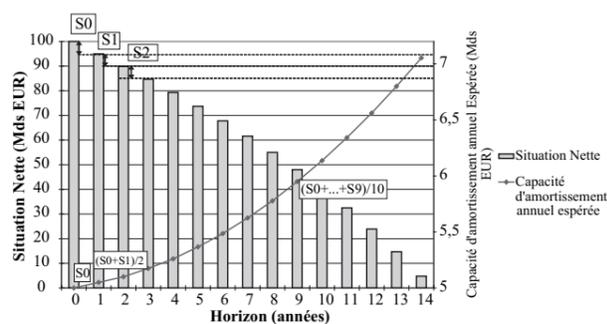
De manière équivalente, on peut tenir le même raisonnement en considérant au lieu du cumul des soldes, le solde annuel moyen (ou capacité d'amortissement annuel moyenne) sur la période entre les années 0 et t , que nous notons \bar{S} , calculé comme suit

$$\bar{S} = \frac{1}{t} S^c(0, t)$$

En effet, la statistique \bar{S} est une fonction monotone, strictement croissante, du cumul des soldes de financement sur la période entre les années 0 et t , homothétique de facteur $\frac{1}{t}$. A dette initiale donnée, plus faible est la capacité d'amortissement annuel moyenne, plus lointain sera l'horizon de remboursement. \bar{S} est notre estimateur de la capacité d'amortissement annuel espérée.

Nous illustrons par l'exemple qui suit, d'une dette initiale de 100 milliards d'euros remboursée en 15 ans, le lien entre le niveau réalisé par \bar{S} , constaté en fin de période, et l'horizon de remboursement.

Graphique 1. Remboursement et capacité d'amortissement annuel espérée un exemple



4. Aversion au risque

La statistique \bar{S} est en même temps une fonction décroissante de l'horizon t , d'allure convexe. La convexité de cette fonction manifeste l'aversion au risque de la CADES. Nous pouvons en effet écrire qu'en deçà d'un certain seuil de capacité d'amortissement annuel réalisée sur la période, l'éloignement de l'horizon s'accroît de plus en plus pour une même dégradation de la capacité d'amortissement annuel moyenne.

Ainsi, il est une région de valeurs risquées pour le cumul des soldes entre 0 et t , et de manière équivalente, pour la capacité d'amortissement annuel moyenne, que nous souhaitons éviter. La réalisation de telles valeurs, au risque α en date t , conduit à un phénomène de « fuite en avant » de l'horizon de remboursement.

5. Le risque sous l'angle de l'investisseur/contribuable

Afin d'apporter un autre éclairage sur les risques encourus, nous abordons le problème sous l'angle d'un investisseur en titre CADES, en même temps contribuable.

Plaçons-nous l'année H , horizon de remboursement probable annoncé. Supposons que ce dernier était détenteur d'un titre remboursé à l'horizon H , que la CADES ait été conduite à réemprunter, et qu'il replace son argent dans la nouvelle émission. Sa richesse, prélèvements inclus, sera diminuée.

En effet, dans l'hypothèse où le spread de crédit est inchangé par le report de la date d'achèvement du remboursement, l'investisseur recevra lors du remplacement la même rémunération, le taux de rendement d'un titre CADES. Mais il supportera un prélèvement supplémentaire sur une durée croissant avec l'écart entre l'horizon estimé en date 0 et celui qui sera effectivement réalisé.

L'analyse peut être effectuée sous un autre angle : selon la loi sur le financement de la sécurité sociale votée en août 2004, tout déficit doit être comblé par des recettes additionnelles de manière à laisser inchangée la date de fin de remboursement. Au lieu de supporter un allongement de la contribution, l'investisseur devrait être prélevé « up-front » des recettes nécessaires pour couvrir le besoin de financement de la CADES en date H .

Son profil de gain/perte est celui d'une position vendeuse de « put », la perte croissant avec l'amplitude de l'erreur d'estimation commise sur l'horizon de remboursement.

Cette analyse éclaire sur l'importance du niveau de probabilité α . Plus on est averse au risque de se tromper sur l'horizon de remboursement, et celui consécutif de devoir faire appel à un prélèvement supplémentaire, plus l'on contraindra α à être petit.

6. Critère d'optimalité

Le choix du critère d'optimalité est un des piliers de toute démarche d'optimisation. Notre variable d'intérêt, le solde de financement annuel espéré, constitue une performance brute. Elle n'est pas suffisante car elle évacue du critère la portée du risque, dont nous avons mesuré l'import-



tance, et ne prend pas en compte l'aversion au risque de la CADES. Nous sommes ainsi amenés à retenir pour critère une mesure de performance ajustée du risque.

Lorsque l'horizon de remboursement était fixe, la variable d'intérêt était la situation nette mesurée à cet horizon. Nous tracions la distribution de cette variable, calculée à cet horizon fixe. La mesure de performance ajustée du risque retenue était un ratio de Sharpe, calculé sur cette distribution. Les valeurs intermédiaires atteintes par la variable d'intérêt n'avaient pas d'importance visible.

Dans le cadre nouveau dressé depuis la suppression de la date-butoir de la CADES – telle qu'elle était fixée dans le décret du 19 décembre 1997 se rapportant à la loi de financement de la sécurité sociale pour 1998, nous arrêtons le processus du solde de financement annuel à la période où la situation nette devient positive. Pour une structure de dettes donnée, nous calculons le « solde annuel espéré » par trajectoires, et simulons sa distribution.

Il convient ensuite d'ajuster cette performance brute du risque, afin de rendre compte de la « qualité » de la distribution. En effet, une stratégie performante doit à la fois optimiser le solde annuel espéré et limiter le risque défini plus haut, auquel nous sommes avertis.

Nous retenons le critère suivant

$$E(S_T) - k\sigma(S_T)$$

Celui-ci récompense les stratégies qui optimisent le solde annuel espéré, et pénalise celles qui autorisent une forte dispersion. Selon la loi forte des grands nombres, si on postule que la distribution du solde annuel espéré est gaussienne, 5 % de la distribution sont situés en dehors de l'intervalle de rayon $1.96 \sigma(S_T)$ centré en $E(S_T)$. Nous prendrons pour k cette valeur, qu'il est d'usage d'arrondir à 2.

7. Méthode de résolution

Nous désignons par portefeuilles-cible, les structures de portefeuilles de dettes qui se révèlent optimales sous la grande majorité des scénarios, dans l'hypothèse où pour un portefeuille donné, il est réalloué systématiquement suivant sa structure initiale pour chaque opération de refinancement ou de rachat. Nous adoptons en cela la méthode popularisée notamment par Black et Perold (1992) [9], appelée CPPI (*Constant Proportion Portfolio Insurance*).

Nous simulons les scénarios par méthode Monte-Carlo et construisons numériquement la distribution de résultats de chaque structure de dette sous la méthode de réallocation citée. Pour cela nous discrétisons les dynamiques de l'actif et du passif suivant le schéma d'Euler, en re-balançant chaque portefeuille avec ses proportions de départ.

Notre processus d'optimisation consiste d'abord à choisir le niveau de risque acceptable sur la base des profils de résultats simulés pour différents portefeuilles admissibles, dont le portefeuille de dettes actuel. La variable présentée plus haut, la capacité d'amortissement annuel, constitue une bonne statistique de test. Il permet en effet de bâtir la règle de décision suivante :

– si la capacité d'amortissement annuel est plus grande que le quantile T_α , on accepte la stratégie,

– si la capacité d'amortissement annuel est inférieure au quantile T_α , on rejette la stratégie.

La probabilité α représente le risque de décider à tort que la stratégie considérée est admissible.

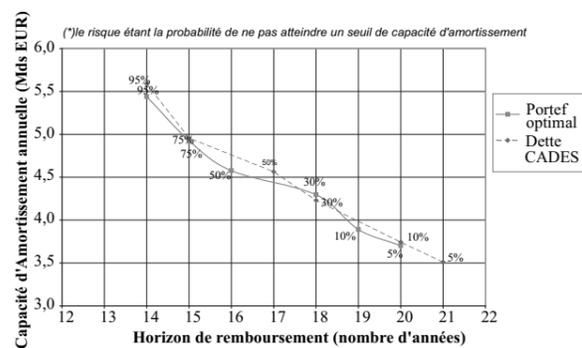
Ainsi, l'on décidera qu'une stratégie d'endettement à une capacité d'amortissement espérée suffisante pour achever celui-ci avant l'horizon H_α , au risque α de se tromper ; ce risque est dit de « première espèce ».

La réalisation du risque de sous-estimation de la durée d'amortissement a pour conséquence un prélèvement supplémentaire pour le contribuable. La convexité du profil de risque accentue la « gravité » de cette conséquence, car plus le niveau de capacité est faible, plus l'allongement de la durée d'amortissement s'accroît, pour une même diminution de la capacité d'amortissement.

Dans le cas inverse, de surestimation de la durée d'amortissement, la conséquence est « moins grave » pour le contribuable, puisqu'il sera moins prélevé que prévu initialement.

Nous représentons ci-après les profils (ou distributions) de résultats de deux portefeuilles. Chaque profil peut être divisé en strates selon la fréquence cumulée. Les strates sont ainsi délimitées par des niveaux de probabilité cumulée : 0 % ; 5 % ; 10 % etc. Cette probabilité cumulée est précisément la notion de risque définie plus haut.

Graphique 2. Dette courante comparée à un portefeuille « optimal » Profils de risque (*)



Le graphique montre par exemple, que le portefeuille dont le profil est représenté par la courbe en bleu, présente une probabilité de 5 % que son solde annuel espéré ne dépasse pas 3.5 milliards d'euros, et la même probabilité de ne pas rembourser avant 21 années.

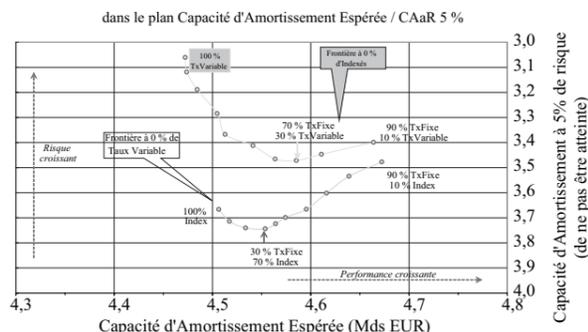
V Outils d'aide à la décision

1. Frontières d'efficience

Nous comparons ensuite toutes les distributions de résultat au niveau de risque α . En les synthétisant par une représentation dans un plan ayant pour axes, une mesure de performance, et le quantile de la distribution du solde annuel de risque α , nous obtenons une frontière d'efficience. Ce quantile sera noté CAAR(α %). Nous avons la capacité de simuler de multiples combinaisons de structures possibles, selon que nous étudions l'effet de la croissance de la part d'indexés, de la part à taux variable, ou d'un allongement de maturité des emprunts. Nous obtenons ainsi plusieurs frontières de portefeuilles, dont voici une sélection.



Graphique 3. Frontières de portefeuilles



2. Mesures de performance et de risque

Les mesures de performance et de risque que nous avons retenues sont usuelles, tout en étant cruciales dans la détermination d'un optimum. Au vu du graphique figurant dans le paragraphe précédent, le portefeuille réalisant l'optimum serait traditionnellement celui situé le plus en bas et le plus à droite du graphique.

Or, il n'est pas nécessairement celui qui maximise le critère d'optimalité que nous avons présenté au chapitre précédent. D'une part, le quantile CAAR(α %) appartient à la distribution « simulée » de la capacité d'amortissement annuel. Celle-ci peut présenter des distorsions par rapport à une distribution gaussienne. D'autre part le critère proposé fait intervenir l'écart-type, racine carrée du second moment de la distribution. On sait qu'il ne permet pas de rendre compte de telles distorsions.

Néanmoins, le critère d'optimalité présenté a l'avantage de constituer une échelle de mesure grâce à laquelle nous pouvons établir un classement des différents portefeuilles.

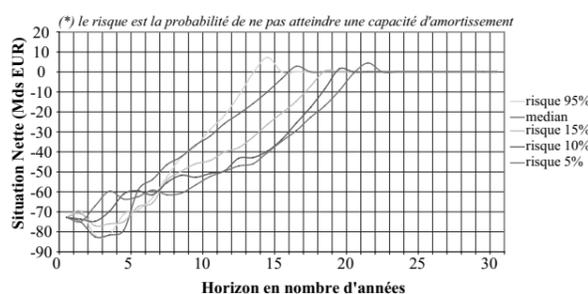
3. Analyse du risque

A. Profils d'amortissement et dominance

Nous conduisons une analyse du risque au niveau des portefeuilles. En effet, chacun peut être caractérisé par des profils d'amortissement qui sont comparables à niveau de risque égal. Un profil d'amortissement est en fait la trajectoire d'amortissement de la dette correspondant pour une structure de portefeuille donnée, au quantile de capacité d'amortissement annuel de risque α (%).

Nous représentons ci-dessous les profils d'amortissement du portefeuille courant de dettes, à différents niveaux de risque.

Graphique 4. Amortissement de la dette selon le niveau de risque (*)



Un profil sera dit meilleur qu'un autre, à même niveau de risque, s'il franchit plus tôt l'axe de situation nette nulle. Les conditions classiques de dominance stochastique aux « premier » et « second ordre » se traduiront ainsi :

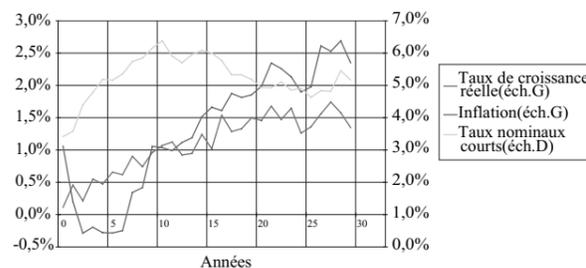
- un portefeuille domine l'autre, au sens de la dominance « au premier ordre », si ses profils sont meilleurs à tous niveaux de risque,
- un portefeuille domine l'autre, au sens de la dominance « au second ordre », si ses profils sont meilleurs aux niveaux de risque inférieurs ou égaux à 50 %.

B. Région de risque

Nous pouvons ensuite répondre à la question : « quels sont les scénarios risqués pour un portefeuille ? » En effet, connaissant la région de risque α (%) de la capacité d'amortissement annuel espérée, nous sommes en mesure d'induire pour chacun des facteurs qui régissent notre économie, les régions représentant le même pourcentage α (%) de risque.

Nous pouvons ainsi identifier les combinaisons risquées des facteurs par portefeuille, et en représenter, par exemple, la trajectoire médiane. Sur le graphique ci-après, nous faisons figurer les trajectoires médianes, dans la région constituant 5 % de risque cumulé, des taux court, taux d'inflation, et taux de croissance de la CRDS en volume, pour le portefeuille de dettes de la CADES.

Graphique 5. Trajectoires des facteurs à 5 % de risque



Les configurations risquées des facteurs diffèrent d'un portefeuille à l'autre. Passer d'une structure de dette à une autre signifie se déplacer dans l'univers des risques décrit. Nos simulations montrent que des scénarios de forte hausse des taux courts nominaux n'entrent pas dans la région de risque à 5 % d'un des portefeuilles optimaux recommandés. Ceux-ci sont très faiblement exposés aux taux courts, ayant une pondération faible voire nulle, en taux flottant.

4. Analyse de performance

A. Analyse statique

Le critère d'optimalité constitue une échelle de valeurs sur laquelle nous pouvons classer les portefeuilles par ordre décroissant. Ayant étudié une multitude de combinaisons de structures possibles, nous avons construit trois frontières :

- une avec un poids croissant de la dette à taux variable au détriment du taux fixe, à part d'indexés sur l'inflation nulle,
- une avec un poids croissant de la dette indexée au détriment du taux fixe, à part en taux flottant nulle,
- une dont une moitié présente une répartition cible de la dette entre taux fixe et indexés, et l'autre moitié une variante accordant 10 % à la part à taux variable au détriment



du taux fixe, les portefeuilles différant par la répartition des maturités.

Elles permettent, en séquence, d'évaluer une « cible » du partage entre dette à taux fixe et indexée. Ce partage doit être réévalué régulièrement, et nous devons à tout le moins tester sa stabilité sur une période d'estimation suffisante. La fréquence de cette évaluation est actuellement mensuelle.

À partir de cette dernière frontière, nous construisons un petit nombre de sous-ensembles de portefeuilles combinant les répartitions de maturité apparues comme les meilleures, et faisant varier le partage de l'exposition entre dette à taux fixe et indexée sur l'inflation autour de la « cible ».

Nous procédons à leur évaluation à intervalles hebdomadaires. Au sein de ces sous-frontières, nous tentons de repérer un noyau formé des meilleurs portefeuilles, dont nous testons la stabilité.

Nous évaluons dans la même analyse le portefeuille de dette courant, et pouvons mesurer le gain procuré en termes de performances et de profil de risque, s'il était transformé en l'un des portefeuilles du noyau. En effet, nos analyses montrent que la structure de dettes courante est dominée par ces portefeuilles.

B. Analyse dynamique

Lorsque nous comparons la dette courante d'une date de calcul à l'autre, il convient de séparer trois effets.

Le portefeuille de la dette est constitué de titres, soumis aux variations du marché. Les paramètres du modèle, calibrés sur des prix et taux de marché se modifient avec eux, les simulations subissent donc cet effet, d'un instant d'évaluation à un autre.

Il faut ensuite distinguer, l'effet de variation de l'encours, ainsi que celui des opérations réalisées, *i.e.* d'un changement de structure, lequel doit être mesuré à encours de dette constant. Pour cela, il convient d'évaluer d'une part, le portefeuille de dettes courant avec le nouvel encours sous la structure qui prévalait avant passage des opérations, *càd* en faisant comme si on avait conservé la structure de la date d'évaluation précédente, et d'autre part, cette même dette courante, après passage des opérations.

L'écart des mesures de performance entre deux instants d'évaluations, sur la dette ancienne à structure constante, avec même encours, représente les effets du temps, des variations de marché, et éventuellement de nouvelles données (indice d'inflation, encaissement de CRDS constaté).

À un même instant d'évaluation, l'écart entre les mesures effectuées sur la dette à structure constante, avec encours différent, représente l'effet de variation de l'encours.

Enfin, au même instant d'évaluation, l'écart des mesures effectuées sur la dette avec nouvel encours, entre ancienne et nouvelle structure, représente l'effet des opérations.

Ainsi, nous avons simulé en date du 29-déc.2005 ce que serait devenu le portefeuille d'endettement de la CADES si, lors du rechargement de 50 milliards d'euros, il avait été constitué suivant sa composition au 7 mars 2005. Nous avons comparé cette évaluation avec celle de la dette courante de la CADES aux dates du

30 septembre 2004, le rechargement étant provisionné, et du 29 décembre 2005. Les résultats sont synthétisés dans le tableau suivant, au travers de la performance ajustée du risque décrite en sous-section 4.6.

Tableau 1. Performance ajustée du risque de la dette courante

| | au 30-09-04 | au 29-12-05 avec structure du 07-03-05 | au 29-12-05 avec structure courante |
|------------|-------------|--|-------------------------------------|
| 80 Mds EUR | - 1.49 | 1.03 | 1.56 |

Notre portefeuille, après reprise de dettes de l'assurance maladie pour 50 milliards, présentait au 29 décembre 2005 un surcroît de performance de 0.53, au sens de notre critère de performance ajustée du risque.

5. Mesure de performance financière : taux de rendement interne

Nous présentons en outre une mesure actuarielle et non plus statistique, qui permet de traduire autrement la performance d'un portefeuille de dettes, et repose sur l'analyse suivante.

Pour un portefeuille donné, une trajectoire est une séquence de flux constituée des soldes annuels, calculés en euros courants, qui ont permis d'atteindre (ou non) le remboursement d'une dette initiale. Pour chaque trajectoire, nous pouvons déterminer le taux d'actualisation pour lequel la somme des soldes annuels actualisés, est égale à la valeur présente de cette dette. A l'issue d'un jeu de simulations, chaque portefeuille pourra ainsi être caractérisé par une distribution de « taux de rendement internes », ou TRI.

Cette mesure actuarielle a une traduction financière concrète, car elle rend simultanément compte de la capacité de rembourser, et de la vitesse de remboursement. Plus importants sont les soldes annuels, plus tôt la dette est amortie, et meilleur est le TRI du portefeuille.

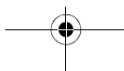
Cette mesure permet d'établir un parallèle entre notre établissement et un agent qui évalue un projet d'investissement. L'agent connaît le coût total présent du projet et en estime les flux de recettes nettes futures escomptées. Ceci lui permet d'en évaluer le taux de rentabilité. De manière similaire, la CADES a un « projet d'endettement ». Elle en connaît la valeur présente, et estime ses flux d'amortissement futurs, pour en évaluer le TRI.

6. Instruments d'analyse

Notre suivi de portefeuilles présente deux volets :

- évaluer le portefeuille courant de dettes en figeant différentes « photographies » de celui-ci au cours du temps. Ceci permet, comme cela a été exposé en sous-section 5.4, de comparer sa situation présente à celle qu'il aurait atteinte si aucune opération n'avait été effectuée depuis la dernière « photographie » ;

- évaluer l'ensemble des portefeuilles-cibles, et la distance qui sépare notre dette courante des meilleurs portefeuilles. Ceci permet d'estimer au cours du temps, la part de





la performance due à un rapprochement (ou à une déviation) par rapport à une structure-cible.

En termes de pilotage de la gestion, deux voies sont ouvertes, qui peuvent être complémentaires :

- dans une perspective de risque, partant du portefeuille existant, et si l'on considère opportun de s'immuniser contre la zone de risque telle qu'analysée par le modèle, on pourra envisager des opérations de couverture pour se protéger contre les valeurs « risquées » des variables de marché ;

- dans une perspective d'optimisation, on aura comme objectif de se rapprocher du noyau des portefeuilles-cibles. Le choix de la direction dans laquelle on se déplace dépend de la priorité que l'on se fixe en termes d'arbitrage rendement/risque, et bien sûr, du contexte du marché.

VI Gestion actif-passif et modèle

1. Hypothèses de la modélisation et valeurs des paramètres

Le compartiment de dette à taux fixe devrait être avantage par une inflation positive, ou cyclique, *i.e.* corrélée positivement à la croissance ainsi qu'aux taux nominaux. Les résultats du modèle dépendront au premier ordre de l'écart $(g - \tau_{\text{reel}})$, τ_{reel} désignant le taux nominal déflaté.

Plus généralement, si les hypothèses du modèle conduisent à générer des taux « déflatés » d'un compartiment donné, tels que l'écart ci-dessus soit le plus souvent positif durant la phase d'emprunt, ce compartiment de dette sera un des meilleurs candidats, notamment en termes de capacité de remboursement espérée.

Les tendances de long terme, les forces de rappel éventuelles, et surtout les volatilités des différents facteurs, sont donc déterminantes d'une part sur les mesures de performance et de risque, d'autre part sur les résultats de l'optimisation.

Au second ordre, les résultats dépendront des corrélations entre les facteurs de risque.

2. Règles de ré-allocation et optimalité des portefeuilles résultants

Qu'on raisonne sur un critère d'utilité de richesse terminale, ou de richesse inter-temporelle, la résolution de l'optimisation ne peut être différente, sinon l'établissement aurait deux solutions pour atteindre un même objectif, l'une étant forcément moins optimale que l'autre. Le même raisonnement par l'absurde peut s'employer si on compare notre méthode d'optimisation qu'on pourrait qualifier d'empirique, et une méthode de résolution analytique du programme formalisé en section IV, à l'aide des outils du contrôle optimal.

La stratégie de refinancement/remplacement adoptée, de type CPPI, conduit à assujettir une contrainte *a priori* sur la solution du programme. Elle est acceptable lorsqu'elle correspond à une règle de fonctionnement de l'établissement, ou modélise sa rationalité dans le futur.

Par exemple dans le cas des assureurs-vie, des règles de dégagement des plus-values sont intégrées à leur stratégie de remplacement.

Dans notre cas, cette stratégie conduit vraisemblablement à un comportement qui n'est pas tout le temps optimal.

3. Risque de modèle : des réponses

Les résultats sont inévitablement le produit d'une part des hypothèses fondamentales du modèle, d'autre part des conditions initiales.

Pour nous prémunir contre le risque de modèle, nous avons quelques moyens d'action :

- effectuer des simulations du modèle sur des configurations de marché contrastées dans la mesure où les données le permettent,

- effectuer des simulations de manière régulière,

- procéder à des chocs sur l'une ou l'autre des hypothèses fondamentales, pour « contrôler » la réponse du modèle,

- nous doter de modèles alternatifs.

4. Évolutions envisagées

Nous avons développé d'autres modélisations, notamment dans un cadre purement économétrique, un modèle Vectoriel Auto-Régressif. Nous avons en outre pu mettre en place un modèle quantitatif sur la dette indexée, grâce aux travaux réalisés par I.Toder (2004) [12], basés principalement sur l'article de Jarrow et Yildirim (2002) [10].

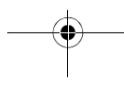
Il nous faudra intégrer ce modèle, écrit sous la probabilité risque-neutre, à la modélisation de notre économie, sous la probabilité historique.

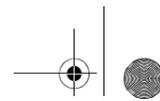
Enfin, il reste à résoudre dynamiquement le programme défini en section IV pour trouver un portefeuille optimal, à l'aide des techniques du contrôle optimal stochastique.

5. Réflexions sur la gestion d'une dette

Nous sommes sensibles à notre actif de manière prépondérante, comme l'a montré la représentation schématique de notre bilan. Nous avons la possibilité de modéliser notre actif de manière relativement simple, sur un horizon suffisamment long. L'exercice est autrement difficile pour nombre d'établissements, soit sur le plan de la modélisation d'une partie de leur bilan, soit du fait de leur visibilité réduite étant donné un « business cycle » assez court, de 2 à 5 ans.

Nous pouvons utiliser pleinement notre gestion actif-passif pour gérer la dette sur longue durée. Si nous nous comparons à des investisseurs institutionnels comme les assureurs-retraite, notre bilan est d'une certaine manière un miroir du leur. En effet, ils investissent dans des actifs rapportant un rendement au moins suffisant pour couvrir des engagements de retraite ayant une forte indexation sur les salaires. Nous sommes émetteurs entre autres, d'instruments indexés sur l'inflation, et notre actif croît approximativement au rythme des salaires. Nos processus respectifs d'allocation visent à optimiser un objectif semblable, de signe opposé.





VII Conclusion

Le taux nominal que coûte notre dette est lié à son caractère soutenable. La dette est soutenable tant que son montant est au plus égal à la somme des revenus attendus actualisés. Si le taux nominal excède une valeur d'équilibre, la dette n'est plus soutenable. Maîtriser l'espérance des coûts futurs et la variabilité de l'amortissement est ainsi au cœur de la gestion de la dette.

Références

- [1] Brennan M.J., Y. Xia (Juin 2002), « Dynamic asset allocation under inflation », *Journal of Finance*
- [2] Markowitz H (1959), « Portfolio selection : efficient diversification of investment », *New York, Wiley*
- [3] Campbell J.Y., Luis M. Viceira (1999), « Who should buy long term bonds », *Working Paper, Harvard University*
- [4] Grasselli M. (Oct-Nov 2004), « Méthodes récentes de gestion des fonds de retraite », *Banque et Marchés*
- [5] Cairns A.J.G. (1998), « Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time », *pre-print*
- [6] Svensson L.E.O., I.M. Werner (1993), « Non-traded assets in incomplete markets », *European Economic Review*
- [7] Koo H.K. (1998), « Consumption and portfolio selection with labour income : a continuous time approach », *Mathematical Finance*
- [8] Vasicek O. (1977), « An equilibrium characterization of the term structure », *Journal of Financial Economics*
- [9] Black F., A. Perold (1992), « Theory of Constant Proportions Portfolio Insurance », *Journal of Economic Dynamics and Control*
- [10] Jarrow R., Y. Yildirim (2002), « Pricing treasury inflation protected securities and related derivatives using an HJM model », *Working Paper, Cornell University*
- [11] Robert C. Merton (1971), « Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model », *Journal of Economic Theory*
- [12] Toder I. (Sept 2004), « Modélisation de la dette indexée inflation », *Mémoire de DEA « Probabilités et Finances » Université Pierre et Marie Curie PARIS VI, CADES*

Il appartient à présent à notre établissement d'estimer la date d'achèvement du remboursement. C'est l'un des éléments que nous évaluons avec certaines précautions. Comme nous l'avons exposé en sous-section 4.7, le risque de sous-estimation s'apparente en économétrie à un risque de première espèce, et sa gravité est bien plus importante que celui de surestimation. La réalisation de ce risque se traduirait par un surcoût, auquel la CADES est averse par définition.

